Opakování: (M, d) je totálně omezený $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subseteq M$: A je ε-síť pro M
KONEČNÁ

(tj. $\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = M$)

Věta 18: (M, d) MP je TO $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \forall A \subseteq M$: A je ε-separovaná $\Rightarrow$ A je konečná.

[ε-sep: $\forall x, y \in A$: $d(x, y) \geq \varepsilon$.]

Věta 19: Buď (M, d) MP, $N \subseteq M$.
Pokud (M, d) je TO, pak i (N, d) je TO.
(„TO se zachovává na podprostory.“)

Důkaz: Nechť $A \subseteq N$ je ε-separovaná.

Chceme: A je konečná. (Pak (N, d) je TO podle V18).

Ale $A \subseteq N \subseteq M$, tedy $A \subseteq M$ je ε-separovaná v M.
Ale M je TO (předp.), tedy (V18) A byl konečná. $\boxtimes$

Věta 20: (M, d) ... MP, $N \subseteq M$.
Je-li (N, d) je TO, pak $(\overline{N}, d)$ je TO.
(kde $\overline{N}$ je vzhledem k M).
(„TO se zachovává na uzávěr.“)

Důkaz: $\varepsilon > 0$ dáno; chceme konečnou ε-síť v prostoru $(\bar{N}, d)$.

Nechť $A \subseteq N$ je konečná $\varepsilon/2$-síť pro N (ta ex., neboť (N, d) je TO).

Chceme: A je ε-síť pro $(\bar{N}, d)$.

Zvolme libovolný bod $x \in \bar{N}$

Chceme: $\exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon$.

Protože $x \in \bar{N}$, existuje $z \in N : d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(Připomeň: $\bar{N} = \{z \in M : d(z, N) = 0\}$)

Protože A je $\varepsilon/2$-síť pro N, existuje bod $y \in A$: $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(z \in N!)$

Tedy $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) <$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ☒

Tj. A je ε-síť pro $\bar{N}$.

Věta 21: Nechť (M_α, d_α), $\alpha \in I$ jsou MP, $\operatorname{diam} M_\alpha \le 1$, $\alpha \in I$. Pak $\sum_{\alpha \in I} (M_\alpha, d_\alpha)$ je TO $\iff$ I je konečná a $\forall \alpha \in I : (M_\alpha, d_\alpha)$ je TO.

Důkaz: $(\Rightarrow)$ nechť $\Sigma(M_\alpha, d_\alpha)$ je TO, $\alpha \in I$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pokud $\varepsilon > 1$ triviální; BÚNO $\varepsilon < 1$.

Nechť $A \subseteq \Sigma(M_\alpha, d_\alpha)$ je konečná ε-síť.

Položme $A_\alpha := \{x \in M_\alpha : (x, \alpha) \in A\}$.

Tvrdím, že A_α je ε-síť pro (M_α, d_α).

Snadné Cv. z definice sumy. (Proč chceme $\varepsilon < 1$?)

($\Leftarrow$) Podle předp., pro dané $\varepsilon > 0$, $\forall \alpha \in I \ \exists A_\alpha \subseteq M_\alpha$: A_α je kon. ε-síť pro M_α.
(Protože (M_α, d_α) jsou TB.)

Chceme je „sjednotit" a dostat tak ε-síť pro $\sum_{\alpha \in I} (M_\alpha, d_\alpha)$.

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} \underbrace{A_\alpha \times \{\alpha\}}_{\ni (x,\alpha),\ \text{kde } x \in A_\alpha} \text{ je } \varepsilon\text{-síť pro } \sum_{\alpha \in I} (M_\alpha, d_\alpha)$$

Nechť $(x, \alpha) \in \sum_{\alpha \in I} (M_\alpha, d_\alpha)$. Pak podle volby A_α existuje $y \in A_\alpha$: $d_\alpha(x,y) < \varepsilon$.
Tedy $d((x,\alpha), \underbrace{(y,\alpha)}_{\in A}) = d_\alpha(x,y) < \varepsilon$.

Ale A je konečná, neboť je sjednocením konečně mnoha (I je konečná) konečných množin (všechny A_α jsou kon.) $\boxtimes$

Věta 22: nechť (M_i, d_i) pon MP, $i \in \mathbb{N}$, nechť $\forall i$: $\operatorname{diam} M_i \le 1$.

Pak $(M, d) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (M_i, d_i)$ je TO

$\iff \forall i \in \mathbb{N}$: (M_i, d_i) je TO.

Připomeň: $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in M$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Důkaz: $(\Rightarrow)$ nechť (M, d) je TO, $i \in \mathbb{N}$.

Chceme: (M_i, d_i) je TO.

[**Cv.:** $\varepsilon > 0$, kon. ε-síť v (M, d) ... vyrobte kon. η-síť v (M_i, d_i).]

Zvolme $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in M$. Definujme zobr.

$\varphi : (M_i, d_i) \to (M, d)$: $\varphi(x) =$

$\varphi(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{x}_{i\text{-tá složka}}, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots) \in M$

Pak $\varphi : \left(M_i, \frac{d_i}{2^i}\right) \to (M, d)$ je izometrie. [$x, y \in M_i$;

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \frac{d_i(x, y)}{2^i} = \frac{d_i}{2^i}(x, y).]$$

Tedy $\left(M_i, \frac{d_i}{2^i}\right)$ lze chápat jako podprostor (M, d). Přesněji $\varphi(M_i) \subseteq M$,

$$(\varphi(M_i), d) \underset{\text{izometr.}}{\cong} \left(M_i, \frac{d_i}{2^i}\right).$$

Ale M je TO $\overset{\text{V19}}{\Longrightarrow}$ $\varphi(M_i)$ je TO

$\overset{\text{izom.}}{\Longrightarrow} \left(M_i, \frac{d_i}{2^i}\right)$ je TO $\overset{\text{Cv.}}{\Longrightarrow}$ (M_i, d_i) je TO

($\Leftarrow$) nechť $\forall i \in \mathbb{N}$: (M_i, d_i) TO.

nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $i_0 \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Pro $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$ najdeme konečné $\frac{\varepsilon}{2}$-sítě A_i pro M_i.

$$S = \{ (x_i) \in M : x_i \in A_i, i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}, \; x_i = \boxed{a_i}, i \geq i_0 \}$$

pevná hodnota

S je konečná: $|S| = \prod_{i=1}^{i_0 - 1} |A_i|$.

Tvrdím: S je ε-síť pro M.

Zvolme $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in M$.

Pro $i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}$ najdeme $x_i \in A_i$, že $d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ (neboť A_i je $\varepsilon/2$-síť pro M_i)

$x_i := a_i$ $i \geq i_0$. Pak $x \in S$ (def. S) a
$$d(y, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{i_0 - 1} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} <$$
$$< \sum_{i=1}^{i_0 - 1} \frac{\varepsilon/2}{2^i} + \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} <$$

$\operatorname{diam} M_i \leq 1$

$$< \varepsilon/2 \cdot \sum_{i=1}^{i_0 - 1} \frac{1}{2^i} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy S je ε-síť pro M (kon.) $\boxtimes$

SPOČETNOST × NESPOČETNOST

A je spočetná, jestliže $\exists f: A \to \mathbb{N}$ bij.

A je nespočetná, jestliže není konečná, ani spoč.

$\mathbb{Q}$ je spoč., $\mathbb{R}$ je nespočetná

(Cantorova diag. metoda)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| = |\mathbb{N}|,$$ pokud $\forall i: A_i$ je spoč.

$$|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$$ pro A, B nekon.

$$|P(A)| > |A|,$$ kde

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

(CH) Kdykoliv A je taková, že

$$|\mathbb{N}| \leq |A| \leq |\mathbb{R}| \implies$$

$$\Rightarrow |A| = |\mathbb{N}| \lor |A| = |\mathbb{R}|.$$

Výrok (CH) je nerozhodnutelný v (ZFC) resp. (ZF).

(CH) ani $\neg$(CH) nemá v těchto syst. důkaz.

CH … Continuum Hypothesis]

Pozn.: Píšeme-li $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, jde o sjednocení $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, tj. máme spočetně mnoho množin A_i.